2020学年第一学期9+1高中联盟期中考试

高三数学参考答案

一、选择题（本大题共10小题，每小题4分，共40分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	A	D	A	B	D	C	B	B	A

二、填空题（第11-14题，每空3分，第15-17题，每空4分，共36分）

11. $\underline{\quad 32 \quad}$ $\underline{\quad 80 \quad}$　　12. $\underline{\quad 1 \quad}$ $\underline{\quad 2 \quad}$　　13. $\underline{\quad \dfrac{\pi}{3} \quad}$ $\underline{\quad \dfrac{1}{4} \quad}$

14. $\underline{\quad \sqrt{5} \quad}$ $\underline{\quad 3 \quad}$　　15. $\underline{\quad 8 \quad}$　　16. $\underline{\quad [0,\dfrac{15}{16}] \quad}$　　17. $\underline{\quad 3\sqrt{2} \quad}$

三、解答题（本大题共5小题，共74分）

18．解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x)=\dfrac{1}{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$，

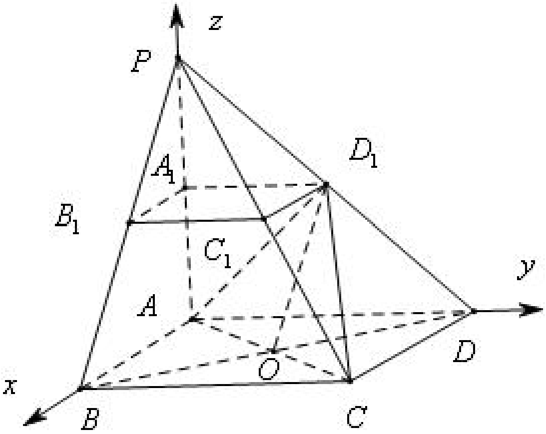
$f(x)$ 的最小正周期为 π．　　　　（7分）

（Ⅱ）Q $0\le x\le\dfrac{5\pi}{12}$，$\therefore 0\le 2x\le\dfrac{5\pi}{6}$，$\therefore\dfrac{\pi}{6}\le 2x+\dfrac{\pi}{6}\le\pi$，所以 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{5\pi}{12}\right]$ 上的值域为 $[0,\dfrac{1}{2}]$．　　　　（14分）

19．（Ⅰ）证明：由题意，延长 AA_1，BB_1，CC_1，DD_1 可交于一点，记为 P，连接 BD 与 AC 交于 O，连接 OD_1，$A_1D_1=1$，$AD=2$，$\therefore D_1$ 是 PD 中点，又 O 是 BD 中点，$PB//D_1O$，$PB//$ 平面 ACD_1，$B_1B//$ 平面 ACD_1．　　　　（7分）

（Ⅱ）解：如图建立空间直角坐标系，$P(0,0,2)$，$C(2,2,0)$，$\therefore C_1(1,1,1)$，$\therefore\overrightarrow{C_1C}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$，

$D(0,2,0)$，$\therefore D_1(0,1,1)$，$\therefore\overrightarrow{AD_1}=(0,1,1)$，设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 ACD_1 的一个法向量，



则 $\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{AC}=0, \\ n\cdot\overrightarrow{AD_1}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x+2y=0, \\ y+z=0, \end{cases}$，可取 $\vec{n}=(1,-1,1)$，

又 $\overrightarrow{C_1C}=(1,1,-1)$，设直线 C_1C 与平面 ACD_1 所成角为 θ，则

$\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{C_1C},\vec{n}>|=\dfrac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$ （15 分）

20．（Ⅰ）解：$\because \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$，所以数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，公比 $q=2$，$a_1q+a_1q^2=12$，所以 $a_1=2$，

$\therefore a_n=2^n$，所以 $b_n-b_{n-1}=2^{n-1}$，$\ldots b_2-b_1=2^1=2$，$b_n-b_1=2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-2$，

$\therefore b_n=2^n-1$ （7 分）

（Ⅱ）证明：$\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\cdots+\dfrac{1}{b_n}=1+\dfrac{1}{2^2-1}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}<1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}=\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{2}(1-(\dfrac{1}{2})^{n-2})$

$=\dfrac{11}{6}-(\dfrac{1}{2})^{n-1}<\dfrac{11}{6}$ （15 分）

21.解：(I) $\therefore 5-(-\dfrac{p}{2})=6 \therefore p=2$

$\therefore E: y^2=4x$ （5 分）

(II) 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),N(x_0,y_0)$

$$\left.\begin{array}{r} l_1: y=kx-1(k>0) \\ y^2=4x \end{array}\right\} \Rightarrow k^2x^2-(2k+4)x+1=0$$

$$\therefore x_1+x_2=\frac{2k+4}{k^2}, x_1x_2=\frac{1}{k^2}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB} \\ \overrightarrow{NA}=\lambda\overrightarrow{NB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1=\lambda x_2 \\ x_1-x_0=\lambda(x_2-x_0) \end{cases} \Rightarrow \lambda=\frac{-x_1}{x_2}=\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}$$

$$\Rightarrow x_0=\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}=\frac{1}{k+2} \therefore |MN|=\frac{\sqrt{1+k^2}}{k+2}$$

又 $l_2: y=-\frac{1}{k}x-1 \therefore C(-1,\frac{1}{k}-1) \therefore |MC|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$

$\therefore S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2}|MN||MC|=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+k^2}}{k+2}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}=\frac{1+k^2}{2k(k+2)}(k>0)$

令 $f(k)=\frac{1+k^2}{k(k+2)}(k>0)$ 则 $f'(k)=\frac{2k^2-2k-2}{(k^2+2k)^2}(k>0)$

$f'(k)=0$ 时 $k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \therefore f(k)$ 在 $(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2})\searrow,\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)\nearrow$

$\therefore f(k)_{\min}=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \therefore S_{\triangle CMN}\in[\frac{\sqrt{5}-1}{4},+\infty)$ （15 分）

22. 解（I）当 $\lambda=1$ 时，$f(x)=e^{x-1}+lnx(x>0)$，$f^{'}(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x}$.

设切点坐标为 $Q(x_0,f(x_0))$，则曲线过 Q 的切线方程为：

$$y=f^{'}(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=\left(e^{x_0-1}+\frac{1}{x_0}\right)(x-x_0)+e^{x_0-1}+lnx_0$$

由切线经过点 P 可得 $t=(1-x_0)e^{x_0-1}+lnx_0-1$.

令 $g(x)=(1-x)e^{x-1}+lnx-1$，则$g^{'}(x)=-xe^{x-1}+\frac{1}{x}$.

$g''(x)=-(1+x)e^{x-1}-\frac{1}{x^2}<0$

注意到$g^{'}(1)=0$，且$g^{'}(x)$在 $x>0$ 上单调递减，

所以 $g(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减。

故 $g(x)\le g(1)=-1$. 而当 $x\to 0^+$， $g(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$，$g(x)\to-\infty$

故若 $t=g(x)$有两个实根，则 t 的取值范围是 $t<-1$. （7 分）

（II）① $F(x)=f(x)+\lambda=e^{x-1}+\lambda lnx+\lambda$，$F^{'}(x)=e^{x-1}+\frac{\lambda}{x}$.

当$\lambda\ge 0$ 时，$F^{'}(x)>0$，故 $F(x)$在 $x>0$ 上单调递增，不可能有两个零点。

当$\lambda<0$ 时，令$F^{'}(x_0)=0$，则$e^{x_0-1}+\frac{\lambda}{x_0}=0$，即$\lambda=-x_0e^{x_0-1}$.

此时$F^{'}(x)=e^{x-1}-\frac{x_0}{x}e^{x_0-1}=\frac{xe^{x-1}-x_0e^{x_0-1}}{x}$.

所以当 $0<x<x_0$时，$F^{'}(x)<0$，$F(x)$单调递减，当 $x>x_0$时，$F^{'}(x)>0$，$F(x)$单调递增。又当 $x\to 0^+$， $F(\mathrm{x})\to+\infty$ ，当 $x\to+\infty$，$F(x)\to+\infty$，所以要使 $F(x)$在 $x>0$ 上有两个零点，则 $F(x_0)<0$. 即 $0>F(x_0)=e^{x_0-1}+\lambda lnx_0+\lambda=-\frac{\lambda}{x_0}+\lambda lnx_0+\lambda=\lambda(lnx_0-\frac{1}{x_0}+1)$，

所以 $lnx_0-\frac{1}{x_0}+1>0$.

令 $h(x)=lnx-\frac{1}{x}+1$，注意到 $h(x)$在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $h(1)=0$，所以$x_0>1$．所以$\lambda=-x_0e^{x_0-1}<-1$.

② 考虑使用零点存在定理，即 $F\left(\frac{1}{e}\right)=e^{\frac{1}{e}-1}>0,F(1)=1+\lambda<0,$．当 $x\to+\infty$，$F(x)\to+\infty$，所以$\frac{1}{e}<x_1<1<x_2$ （15 分）

另解：

由 $e^{x-1}+\lambda\ln x+\lambda=0$ 得 $-\lambda=\dfrac{e^{x-1}}{\ln x+1}(x\neq\dfrac{1}{e})$

记 $g(x)=\dfrac{e^{x-1}}{\ln x+1}$ 则 $g'(x)=\dfrac{e^{x-1}(\ln x-\frac{1}{x}+1)}{(\ln x+1)^2}$

当 $x\in(0,1)$ 且 $x\neq\dfrac{1}{e}$ 时 $g'(x)<0$

当 $x>1$ 时 $g'(x)>0$

画出 $g(x)$ 的大致图象，

如图示，有两个零点的条件是

$-\lambda>1\Rightarrow\lambda<-1$

且 $\dfrac{1}{e}<x_1<1<x_2$